

Setzstrategien, goldener Schnitt und ein Erwartungswert-Paradoxon

NORBERT HENZE, KARLSRUHE, UND REIMUND VEHLING, HANNOVER

Zusammenfassung: Wir betrachten unabhängige Bernoulli-Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p . Anja hat zwei Chips, die sie entweder beide auf Treffer, beide auf Niete oder verteilt auf Treffer und Niete setzen kann. Bei Auftreten eines Treffers oder einer Niete kann Anja – sofern noch ein Chip auf dem betreffenden Setz-Feld vorhanden ist – diesen entfernen. Ihr Ziel besteht darin, den Erwartungswert der Anzahl der Bernoulli-Versuche zu minimieren, bis beide Chips entfernt werden können. Im Fall $p = 0,99$ ist es offenbar ratsam, beide Chips auf Treffer zu platzieren, und im Fall $p = 1/2$ stellt sich heraus, dass man die Chips lieber verteilen sollte. Für welches p sind beide Strategien gleichwertig? Wie sieht es aus, wenn Anja und Bettina mit unterschiedlichen Setzstrategien gegeneinander antreten und diejenige der beiden gewinnt, die zuerst beide Chips entfernen kann? Dieser Aufsatz behandelt nicht nur beide Fragen, wobei unter anderem der goldene Schnitt und ein Erwartungswert-Paradoxon auftreten, sondern auch eine naheliegende Verallgemeinerung. Roter Faden ist hierbei das Wechselspiel zwischen Theorie und Simulation.

1 Einleitung

Ein Schlüsselkonzept des gymnasialen Stochastikunterrichts ist das einer Folge unabhängiger Bernoulli-Versuche mit den Ausgängen Treffer bzw. Niete, die als 1 bzw. 0 codiert werden. Dabei wird eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit p zugrundegelegt. Modelliert die Zufallsgröße X_j das Ergebnis des j -ten Versuchs, $j \geq 1$, so sind X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige Zufallsgrößen, und es gilt

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = 0), \quad j \geq 1.$$

Wir betrachten in Verallgemeinerung der in der Zusammenfassung beschriebenen Situation ein Spiel, bei dem Anja n Chips zur Verfügung hat und diese beliebig auf Treffer und Niete verteilen kann. Die als *Setzstrategien* oder kurz *Strategien* bezeichneten Setzmöglichkeiten sind also (ℓ, m) , wobei ℓ und m nichtnegative Zahlen mit Summe n sind. Dabei bedeutet das Paar (ℓ, m) , dass ℓ Chips auf Treffer und m auf Niete platziert werden. Tritt ein Treffer bzw. eine Niete auf, so wird – sofern vorhanden – ein Chip von dem betreffenden Feld entfernt. Es bezeichne $W_{\ell, m}$ die Anzahl der Bernoulli-Versuche, um bei Wahl der

Strategie (ℓ, m) alle Chips entfernen zu können. Welche Strategie (ℓ, m) minimiert in Abhängigkeit von p den Erwartungswert von $W_{\ell, m}$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anja, wenn sie gegen Bettina spielt, die eine andere Strategie verfolgt, und wenn diejenige gewinnt, die als Erste alle Chips entfernen kann? Wir werden unter anderem sehen, dass im Fall $n = 2$ der goldene Schnitt eine Rolle spielt, und dass man sogar im Nachteil sein kann, wenn man im Mittel schneller alle Chips abräumt als die Gegnerin. Die behandelte Situation ist eine Version des Spiels *Release the prisoners* mit nur zwei Zellen, wobei die Chips den Gefangenen entsprechen, siehe Riemer (2019). Im Gegensatz zum allgemeinen Spiel *Release the prisoners* mit sechs Zellen, bei dem man in der Schule aus mathematischer Sicht nur die Verteilung der (nichtnegativen) Differenz der Ergebnisse beim gleichzeitigen Werfen zweier Würfel bestimmen und Gewinnwahrscheinlichkeiten ausschließlich mithilfe von Simulationen schätzen kann, bietet der Fall von nur zwei Zellen auch interessante, spannende Mathematik für den gymnasialen Unterricht.

2 Simulationen und Initialaufgabe

Wir untersuchen zunächst mithilfe unterschiedlich komplexer Simulationen die folgenden Fragen:

- Wie groß ist für verschiedene Strategien (ℓ, m) und Werte für p die durchschnittliche Versuchsanzahl, bis alle Chips abgeräumt sind?
- Welche Strategie hat bei einem Spiel gegen einen weiteren Spieler die größte Erfolgswahrscheinlichkeit?

2.1 Simulation mit dem TI-84 Plus

Hier leistet schon ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) wie der TI-84 Plus gute Dienste. Soll etwa für $p = 0,6$ die Frage (experimentell) beantwortet werden, wann alle $\ell + m$ Chips im Mittel abgeräumt sind, reicht dazu der Befehl $\text{rand}(20) \leq 0,6$, der 20 Pseudozufallszahlen z mit $0 < z < 1$ erzeugt. Ist z kleiner als 0,6, wird eine 1, sonst eine 0 ausgegeben. Die Zahl 20 ist ggf. zu vergrößern, da hiermit nach maximal 20 Versuchen das Ende erreicht sein muss.

Schon diese kleine Simulation kann übrigens die Tür zu $(0,1)$ -Folgen, einer besonderen Zählvariablen und der Indikatorfunktion öffnen. So bedeutet etwa die

Ausgabe {1011110...}, dass bei der Strategie (4,2) nach sieben Versuchen alle Chips abgeräumt sind.

2.2 Simulation mit GeoGebra

Abb. 1 zeigt die obige Ausgabe in zeitlicher Abfolge für die Strategie (4,2). Die durchgezogene Linie gibt an, wieviele der $\ell + m$ Chips noch jeweils insgesamt auf dem Spielfeld sind, und die grob bzw. fein gestrichelte Linie zeigt, wieviele Chips davon jeweils noch auf dem Feld „Treffer“ bzw. „Niete“ stehen; letztere geht ab der fünften Spielrunde in die durchgezogene Linie über. Diese Darstellung liefert vielfältige Beschreibungs- und Argumentationsanlässe, da das Abräumen Schritt für Schritt nachvollzogen werden kann, was die Auswertung erleichtert. Zudem werden ganz nebenbei Erfahrungen über Runlängen (siehe Ebner und Henze (2016)) und unabhängige Zufallsversuche gesammelt.

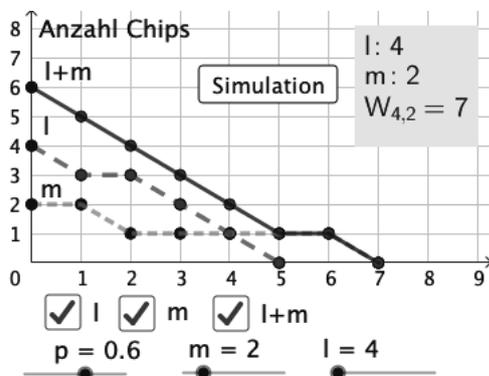


Abb. 1: Simulation mit GeoGebra

Eine Stärke von GeoGebra sind die vielfältigen Visualisierungsmöglichkeiten. Es kann einiges entdeckt werden, wobei neue Fragen auftreten: Was passiert, wenn ein Feld leergeräumt ist? Woran erkennt man, dass alle Chips entfernt sind? Warum verlaufen zwei Wege irgendwann gleich? Man sieht auch, dass die Chips so verteilt werden sollten, dass die beiden Wege die horizontale Achse möglichst eng benachbart schneiden. Der Darstellungswechsel liefert somit wertvolle neue Erkenntnisse.

2.3 Simulation mit R

Obige und weitere Fragestellungen lassen sich auch mit dem frei verfügbaren professionellen Statistik-Paket R (siehe Core Team (2015)) untersuchen. Dieses Paket stellt Schleifenstrukturen zur Verfügung und liefert auch bei einer großen Anzahl an Wiederholungen schnell ein Ergebnis, sodass umfangreiche Untersuchungen vorgenommen werden können. Der Einsatz von R erfordert zwar gewisse Programmierkenntnisse; es gibt aber immer Schülerinnen und Schüler, die genau daran auch ein Interesse haben.

Abb. 2 zeigt die auf 10000 Wiederholungen fußende empirische Häufigkeitsverteilung von $W_{10,2}$ für $p = 0,8$. Als mittlere Wartezeit bis zum Abräumen liefert R bei dieser Simulation den auf zwei Nachkommastellen gerundeten Wert 14,66. In Abschnitt 5 werden wir sehen, dass im Fall $p = 0,8$

$$\mathbb{E}(W_{10,2}) = \frac{57216733}{3906250} \approx 14,64748 \quad (1)$$

gilt, sodass der erhaltene Mittelwert ein sehr guter Schätzwert für den tatsächlichen Erwartungswert ist.

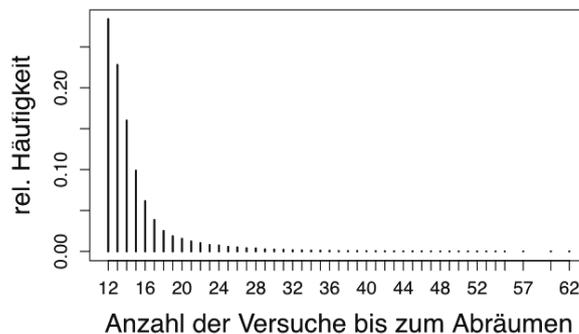


Abb. 2: Simulation mit R zum Abräumen

Für jede Anzahl n und jede Strategie (ℓ, m) mit $\ell + m = n$ lässt sich der Erwartungswert $\mathbb{E}(W_{\ell,m})$ mithilfe von Simulationen schätzen. Tabelle 1 zeigt die mithilfe von R und jeweils 10000 Wiederholungen erhaltenen und auf drei Dezimalstellen gerundeten Ergebnisse für den Fall $n = 4$ und $p = 0,6$. Die Herleitung der exakten Werte und Formeln wird in Abschnitt 5 beschrieben.

ℓ	m	$\mathbb{E}_{\text{emp.}}$	$\mathbb{E}_{\text{exakt}}$
4	0	6,660	$\frac{20}{3} = 6,\bar{6}$
3	1	5,534	$\frac{277}{50} = 5,54$
2	2	5,854	$\frac{439}{75} = 5,85\bar{3}$
1	3	7,607	$\frac{1141}{150} = 7,60\bar{6}$
0	4	10,007	10

Tab. 1: Erwartungswerte – empirisch und exakt

Der zugehörige Programmcode wird im Anhang erläutert.

2.4 Zusammenfassung

Für alle Simulationen gilt, dass durch das Experimentieren und die Arbeit mit Daten vielfältige Erfahrungen gesammelt werden. Zudem entsteht durch Zusammenfassung der Einzelergebnisse aller Lernenden schnell ein Gruppenergebnis, wodurch ein Bezug zum $1/\sqrt{n}$ -Gesetz möglich ist. Welche Simulation für die vorhandene Lerngruppe sinnvoll ist, muss die Lehrkraft entscheiden. Es ist aber gut zu

wissen, dass es diverse Möglichkeiten mit unterschiedlichen Schwerpunkten gibt.

2.5 Initialaufgabe

Es werden unabhängige Bernoulli-Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,6$ betrachtet, mit denen das Entfernen von Chips auf zwei Feldern gesteuert wird. In jedem Durchgang wird beim Auftreten eines Treffers (1) bzw. einer Niete (0) ein Chip entfernt, sofern noch ein Chip auf dem betreffenden Feld 1 bzw. 0 liegt.

a) Insgesamt werden vier Versuche durchgeführt. Anfangs befinden sich drei Chips auf 1 und ein Chip auf 0; es liegt also die Strategie (3,1) vor.

Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

- A: Alle Chips sind entfernt.
- B: Es liegt nur noch ein Chip auf 1.
- C: Insgesamt liegt noch ein Chip auf dem Spielfeld.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 5 (6;7;k) Versuchen alle Chips entfernt sind, wenn zu Beginn alle vier Chips auf 1 liegen.

c) Abbildung 3 zeigt für die Strategie (3,1) der vier Chips das Ergebnis einer Simulation ($p = 0,6$; 1000 Wiederholungen).

Ermitteln Sie damit einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, mindestens neun Versuche zu benötigen, um alle Chips abzuräumen.

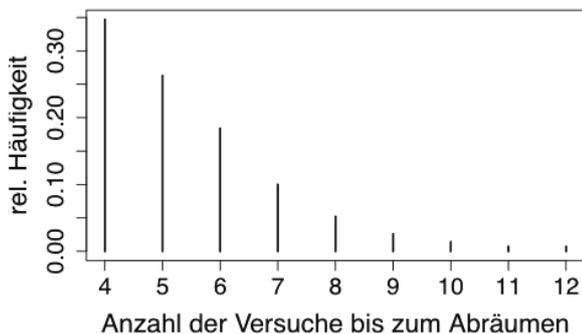


Abb. 3: Ergebnis einer Simulation mit R

d) Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis einer Simulation mit 1000 Wiederholungen. Ausgangspunkt war eine (3,1)-Setzstrategie. In der ersten Zeile stehen die Anzahlen der Versuche bis zum Abräumen, in der zweiten die zugehörigen Häufigkeiten, mit denen diese Anzahlen in den 1000 Wiederholungen auftraten.

Ermitteln Sie mit diesen Daten die durchschnittliche Versuchsanzahl bis zum Abräumen.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
342	293	155	101	42	38	15	7	1	6

e) Der Term

$$\frac{p^3}{(1-p)} + \frac{3}{p}$$

beschreibt für $0 < p < 1$ den Erwartungswert der Anzahl der Versuche bis zum Abräumen aller Chips für die Setzstrategie (3,1). Bestimmen Sie für $p = 0,6$ den zugehörigen Erwartungswert.

Für welche Werte von p ergibt sich der Erwartungswert 10?

Ermitteln Sie mithilfe von Simulationen für verschiedene Werte für p Schätzwerte für den zugehörigen Erwartungswert und vergleichen Sie diese mit den theoretischen Werten.

Diese Aufgabe kann unter anderem als Einführung für die folgenden tiefergehenden Betrachtungen dienen. Die Binomialverteilung wird hier in einem ungewohnten Kontext betrachtet, der keine reflexartige Lösung erlaubt. Vielmehr muss erst nachgedacht werden, welche Größen zum Ziel führen. Weiterhin sollen die Darstellungswechsel sowie die Arbeit mit Daten zu einem (hoffentlich) tieferen Verständnis führen. In Aufgabenteil e) wird schon im Vorgriff mit einem exakten Erwartungswert gearbeitet, wobei sich eine Brücke zur Analysis auftut. Wo kommen dort schon einmal in Anwendungssituationen gebrochen-rationale Funktionen vor?

Lösungshinweise befinden sich im Anhang.

3 Der Fall $n = 2$

Wir betrachten jetzt die einfachste (nichttriviale) Situation, dass zwei Chips gesetzt werden. Werden beide auf Treffer platziert, so ist das Spiel beendet, wenn der zweite Treffer auftritt, und die dafür nötige zufällige Versuchsanzahl ist $W_{2,0}$. Welche Verteilung und welchen Erwartungswert besitzt $W_{2,0}$?

Für jedes $k \geq 2$ tritt das Ereignis $\{W_{2,0} = k\}$ genau dann ein, wenn der zweite Treffer im k -ten Versuch auftritt. Spaltet man dieses Ereignis nach den disjunkten gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten auf, dass sich der erste Treffer im j -ten Versuch einstellt, wobei $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ gilt, so folgt

$$\mathbb{P}(W_{2,0} = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}, \quad k \geq 2. \quad (2)$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, k-1\}$ treten ja der erste Treffer im j -ten und der zweite im k -ten Versuch auf, wenn die ersten k Bernoulli-Versuche die Sequenz $0 \dots 010 \dots 01$ ergeben: Dabei ist die erste Eins das j -te und die zweite Eins das k -te Symbol. Nach der

ersten Pfadregel ist die Wahrscheinlichkeit für diese Sequenz gleich $p^2(1-p)^{k-2}$.

Wenn man den Erwartungswert von $W_{2,0}$ nach der Regel „bilde die Summe aus Wert mal Wahrscheinlichkeit“ berechnen möchte, ergibt sich das Problem, den Wert der unendlichen Reihe

$$\mathbb{E}(W_{2,0}) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

kennen zu müssen. Aus der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

erhält man durch zweimaliges Differenzieren

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1, \\ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Mithilfe der letzten Beziehung folgt dann

$$\mathbb{E}(W_{2,0}) = p^2 \cdot \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}. \quad (4)$$

Dieses Resultat erschließt sich auch ohne Zuhilfenahme geometrischer Reihen mithilfe des in Abb. 4 dargestellten Zustandsgraphen im Zusammenhang mit dem Warten auf den zweiten Treffer.

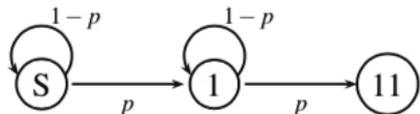


Abb. 4: Zustandsgraph für die Setzstrategie (2,0)

Beim Start der Bernoulli-Folge befindet man sich im Zustand S . Dort verbleibt man, solange kein Treffer auftritt. Ist der erste Treffer erzielt, hat man den Zustand 1 erreicht, und wegen der Gedächtnislosigkeit der Bernoulli-Versuche (stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots) geht alles von vorne los. Der Faktor 2 im Zähler auf der rechten Seite von (4) rührt somit daher, dass man auf den *zweiten* Treffer wartet. Es reicht also, zu zeigen, dass $1/p$ der Erwartungswert der mit $W_{1,0}$ bezeichneten Anzahl der Versuche bis zum *ersten* Treffer ist. Hierzu unterscheiden wir die beiden Fälle $X_1 = 1$ und $X_1 = 0$ für den ersten Bernoulli-Versuch. Ist $X_1 = 1$, was mit Wahrscheinlichkeit p passiert, so ist man schon nach einem Versuch im Zustand 1 angekommen. Ist hingegen $X_1 = 0$, was mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ passiert, so hat man einen vergeblichen, aber im Hinblick auf den Erwartungswert mitzuzählenden Versuch gemacht und befindet sich immer noch im Zustand S . Diese Fallunterscheidung mündet in die oft

auch als *Formel vom totalen Erwartungswert* (siehe z.B. Henze (2021), S. 215) oder *zweite Mittelwertsregel* (Engel (1976), S. 23) bezeichnete Gleichung

$$\mathbb{E}(W_{1,0}) = p \cdot 1 + (1-p)(1 + \mathbb{E}(W_{1,0})),$$

aus der $\mathbb{E}(W_{1,0}) = 1/p$ und somit ebenfalls (4) folgt.

Was passiert bei der Setzstrategie (1,1), je einen Chip auf Treffer und einen auf Nietergebnis zu setzen? Abb. 5 zeigt den zugehörigen Zustandsgraphen.

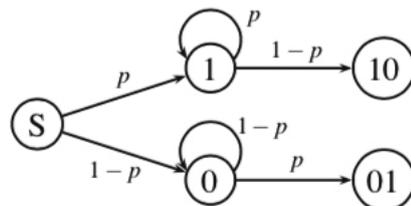


Abb. 5: Zustandsgraph für die Strategie (1,1)

Da der erste Bernoulli-Versuch auf jeden Fall einen Treffer oder eine Nietergebnis ergibt, bietet es sich an, eine Fallunterscheidung nach diesen beiden Möglichkeiten vorzunehmen, um die Verteilung von $W_{1,1}$ zu bestimmen. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (zweite Pfadregel) gilt für jedes $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_{1,1} = k) &= \mathbb{P}(W_{1,1} = k | X_1 = 1) \cdot p \\ &\quad + \mathbb{P}(W_{1,1} = k | X_1 = 0) \cdot (1-p). \end{aligned}$$

Unter der Bedingung $X_1 = 1$, dass der erste Versuch einen Treffer ergibt, wartet man danach auf die erste Nietergebnis, und da diese – damit das Ereignis $\{W_{1,1} = k\}$ eintritt – nach genau $k-1$ weiteren Versuchen auftreten soll, gilt $\mathbb{P}(W_{1,1} = k | X_1 = 1) = p^{k-2}(1-p)$. In gleicher Weise gilt für die zweite bedingte Wahrscheinlichkeit die Gleichung $\mathbb{P}(W_{1,1} = k | X_1 = 0) = (1-p)^{k-2}p$. Insgesamt folgt also

$$\mathbb{P}(W_{1,1} = k) = p^{k-1}(1-p) + (1-p)^{k-1}p. \quad (5)$$

Der Erwartungswert von $W_{1,1}$ ergibt sich hieraus zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{1,1}) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\mathbb{P}(W_{1,1} = k) \\ &= (1-p) \sum_{k=2}^{\infty} kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Da bei beiden auftretenden Reihen ab $k=2$ summiert wird, folgt aus (3) mithilfe direkter Rechnung

$$\mathbb{E}(W_{1,1}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1. \quad (6)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch ohne Zuhilfenahme geometrischer Reihen. Ergibt der erste Versuch einen Treffer, so benötigt man danach im Mittel (Erwartungswert) noch $1/(1-p)$ Versuche bis zum Auftreten der ersten Niete. Liefert der erste Versuch hingegen eine Niete, so wartet man danach im Mittel noch $1/p$ Versuche bis zum ersten Treffer. Nach der Formel vom totalen Erwartungswert gilt also

$$\mathbb{E}(W_{1,1}) = p \left(1 + \frac{1}{1-p} \right) + (1-p) \left(1 + \frac{1}{p} \right),$$

was sich mit (6) deckt.

Für die verbleibende Setzstrategie (0,2) folgt durch Vertauschen von Treffer und Niete aus (2) und (4)

$$\mathbb{P}(W_{0,2} = k) = (k-1)(1-p)^2 p^{k-2}, \quad k \geq 2, \quad (7)$$

$$\mathbb{E}(W_{0,2}) = \frac{2}{1-p}. \quad (8)$$

Abb. 6 zeigt Plots der Erwartungswerte $\mathbb{E}(W_{2,0})$, $\mathbb{E}(W_{1,1})$ und $\mathbb{E}(W_{0,2})$ als Funktionen von p .

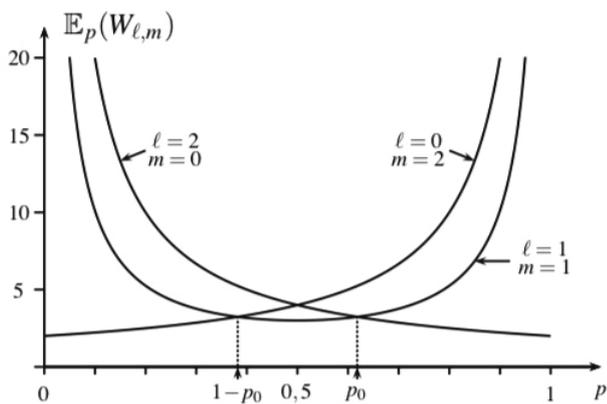


Abb. 6: $\mathbb{E}_p(W_{l,m})$ als Funktion von p

Welche der drei Setzstrategien liefert den kleinsten Erwartungswert für die Anzahl der Bernoulli-Versuche, bis beide Chips entfernt werden können? Um die Abhängigkeit der in (4), (6) und (8) stehenden Erwartungswerte von p hervorzuheben, schreiben wir im Folgenden allgemein $\mathbb{E}_p(W_{l,m})$, indizieren also die Erwartungswerte mit p . Da $\mathbb{E}_p(W_{1,1})$ beim Grenzübergang $p \rightarrow 0$ über alle Grenzen wächst und für $p = 1/2$ die Ungleichung $\mathbb{E}_p(W_{1,1}) = 3 < 4 = \mathbb{E}_p(W_{2,0})$ erfüllt ist, ist es im „fairen Fall“ $p = 1/2$ besser, die beiden Chips zu verteilen als beide auf Treffer zu setzen, was auch plausibel ist.

Ist p jedoch genügend groß, so ist die Strategie, einseitig auf Treffer zu setzen, unter dem betrachteten Optimalitätskriterium besser. Doch was heißt „genügend groß“? Die Gleichung $\mathbb{E}_p(W_{2,0}) =$

$\mathbb{E}_p(W_{1,1})$ ist nach Einsetzen der in (4) und (6) stehenden Ausdrücke und anschließender Multiplikation beider Seiten mit $p(1-p)$ äquivalent zur Bedingung

$$p^2 + p - 1 = 0. \quad (9)$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, von denen eine im Einheitsintervall liegt und durch

$$p_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180$$

gegeben ist. Für $p > p_0$ sollte man also beide Chips auf Treffer setzen, und im Fall $1-p_0 < p < p_0$ ist die „Verteile-Strategie“ vorzuziehen, siehe Abb. 6. Im Fall $p = p_0$ sind beide Strategien im Hinblick auf den Erwartungswert der Anzahl der Bernoulli-Versuche, bis beide Chips entfernt werden können, gleichwertig. Mit (9) folgt

$$\frac{p_0}{1-p_0} = \frac{1}{p_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

und somit teilt die Wahrscheinlichkeit p_0 das Einheitsintervall im Verhältnis des goldenen Schnittes.

4 Ein Zwei-Personen-Spiel

Was passiert, wenn Anja und Bettina gegeneinander spielen, wobei (vorläufig) Bernoulli-Versuche mit dem gerade erhaltenen Wert p_0 zugrundeliegen? Anja setzt beide Chips auf Treffer, und Bettina verteilt ihre beiden Chips auf Treffer und Niete. Diejenige der beiden gewinnt, die zuerst beide Chips entfernen kann. Anja und Bettina wissen, dass sie hierfür im Mittel gleich viele Bernoulli-Versuche benötigen, und sie halten deshalb das Spiel für fair, meinen also, dass jede von ihnen die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt. Stimmt das? Sehen wir uns hierzu die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja an.

Anja gewinnt genau dann, wenn sowohl der erste als auch der zweite Versuch einen Treffer ergeben. Starten die Bernoulli-Versuche nämlich mit einer Niete, so hat Bettina schon gewonnen, denn irgendwann stellt sich der erste Treffer ein, und dann hat sie beide Chips entfernt, bevor Anja fertig ist. Ergibt hingegen der erste Versuch einen Treffer und der zweite eine Niete, so hat Bettina schon nach zwei Versuchen beide Chips entfernt, und Anja wartet noch auf den zweiten Treffer. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja ist also unter Berücksichtigung von (9) gleich

$$\mathbb{P}(W_{2,0} < W_{1,1}) = p_0^2 = 1 - p_0 \approx 0,3820.$$

Obwohl also Anja und Bettina im Mittel gleich lange darauf warten, dass sie beide Chips entfernen

können, ist Anja bei diesem Spiel deutlich im Nachteil. Damit dieses Zwei-Personen-Spiel bei Zugrundelegung einer Trefferwahrscheinlichkeit p fair ist, muss $p^2 = \frac{1}{2}$ gelten, was auf das „faire p “

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

führt. Im Fall $p_0 < p < p_1$ liegt also die paradoxe Situation vor, dass Bettina gegenüber Anja mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p^2 > 0,5$ gewinnt, obwohl sie im Mittel länger darauf wartet als Anja, bis ihre beiden Chips entfernt werden können (siehe hierzu auch Henze et al. (2021), Kap. 11, oder Henze (2000)). Speziell für $p = 2/3$ gelten mit (4) und (6)

$$\mathbb{E}_{2/3}(W_{1,1}) = 3,5 > 3 = \mathbb{E}_{2/3}(W_{2,0}),$$

aber Bettina gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $5/9$. Den Fall $p = 2/3$ kann man mit einem fairen Würfel herstellen, indem jeder der Augenzahlen 1 bis 4 einem Treffer und die 5 oder 6 einer Niete entsprechen.

5 Die Verteilung von $W_{\ell,m}$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, dass insgesamt n Chips auf Treffer und Niete zu verteilen sind, wobei $n \geq 2$ gelte. Wenn ℓ dieser Chips auf Treffer und m auf Niete gesetzt werden (insbesondere gilt also $n = \ell + m$), so hat man alle Chips abgeräumt, wenn *erstmalig mindestens ℓ Treffer und mindestens m Nieten aufgetreten sind*. Die hierzu nötige Anzahl der Bernoulli-Versuche haben wir mit $W_{\ell,m}$ bezeichnet. Diese Zufallsgröße $W_{\ell,m}$ nimmt jeden der Werte k mit $k \geq n$ mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis $\{W_{\ell,m} = k\}$ ein, wobei $k \geq n$ gelte? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind also nach k Bernoulli-Versuchen *erstmalig mindestens ℓ Treffer und mindestens m Nieten* aufgetreten? Um diese Frage zu beantworten, unterscheiden wir die beiden Fälle, dass der k -te Versuch einen Treffer oder eine Niete liefert. Im ersten Fall erzielt man im k -ten Versuch den ℓ -ten Treffer, wobei schon vorher mindestens m Nieten auftraten, und im zweiten Fall tritt im k -ten Versuch die m -te Niete auf, und man hatte schon vorher mindestens ℓ Treffer verzeichnet.

Im ersten Fall ergeben die ersten $k - 1$ Bernoulli-Versuche genau $\ell - 1$ Treffer und damit $k - 1 - (\ell - 1)$ – also wegen $k \geq n$ insbesondere mindestens m – Nieten. Da es nach Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{k-1}{\ell-1}$ Möglichkeiten gibt, aus den von 1 bis $k - 1$ durchnummeriert gedachten Versuchen $\ell - 1$ für

die Treffer auszuwählen, folgt wegen der Kommutativität der Multiplikation, dass dieser erste Fall die Wahrscheinlichkeit

$$\binom{k-1}{\ell-1} p^{\ell-1} (1-p)^{k-\ell} \cdot p$$

besitzt. Dabei ist der durch ein Multiplikationszeichen hervorgehobene Faktor p der Tatsache geschuldet, dass der k -te Versuch einen Treffer ergeben soll.

Mit einem völlig analogen Argument besitzt der zweite Fall die Wahrscheinlichkeit

$$\binom{k-1}{m-1} (1-p)^{m-1} p^{k-m} \cdot (1-p).$$

Addition der erhaltenen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fälle ergibt in Verallgemeinerung von (5)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_{\ell,m} = k) &= \binom{k-1}{\ell-1} p^{\ell} (1-p)^{k-\ell} \quad (10) \\ &+ \binom{k-1}{m-1} (1-p)^m p^{k-m}. \end{aligned}$$

Definiert man die auftretenden Binomialkoeffizienten im Fall $m = 0$ oder $\ell = 0$ zu null, so sind auch die beiden extremen Fälle eingeschlossen, dass alle Chips entweder auf Treffer oder auf Niete gesetzt werden, denn es gelten

$$\mathbb{P}(W_{\ell,0} = k) = \binom{k-1}{\ell-1} p^{\ell} (1-p)^{k-\ell}, \quad k \geq \ell, \quad (11)$$

$$\mathbb{P}(W_{0,m} = k) = \binom{k-1}{m-1} (1-p)^m p^{k-m}, \quad k \geq m. \quad (12)$$

Diese Gleichungen verallgemeinern (2) bzw. (7).

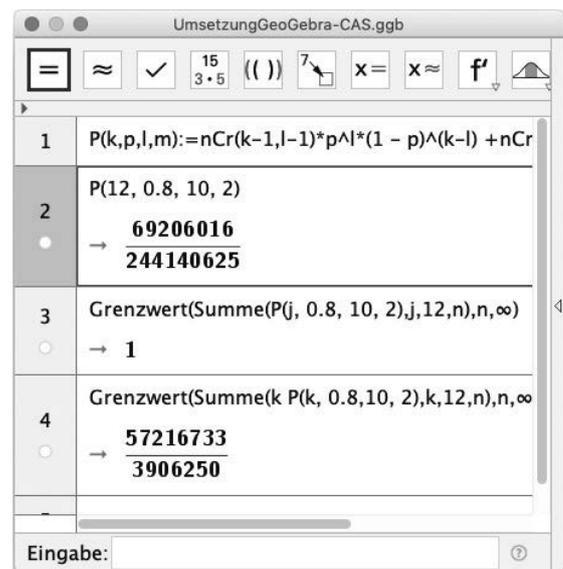


Abb. 7: Umsetzung mit GeoGebra-CAS

Gleichung (10) kann eins-zu-eins in GeoGebra-CAS z. B. als Funktion P mit den vier Variablen k, p, ℓ und

m definiert werden. Abb. 7 zeigt die Umsetzung. Dargestellt wird die Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(W_{10,2} = 12) = \frac{69206016}{244140625},$$

dass bei einer (10,2)-Setzstrategie und $p = 0,8$ alle Chips nach zwölf Durchgängen entfernt sind. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten liefert – wie es auch sein muss – den Wert 1. Der zugehörige Erwartungswert ist in (1) aufgeführt. Die Mächtigkeit von GeoGebra-CAS zeigt sich besonders in der 4. Zeile (s. Abb. 7). Es genügen die beiden Befehle *Grenzwert* und *Summe*, um für jede beliebige Setzstrategie (ℓ, m) und für jedes p den zugehörigen Erwartungswert von $W_{\ell, m}$ zu ermitteln.

Der Einsatz von Schieberegler für die vier Variablen gestattet umfangreiche Untersuchungen mit der Möglichkeit von Dynamisierungen. Abb. 8 und Abb. 9 zeigen zwei Beispiele für dieses fruchtbare Zusammenspiel von Theorie und Computereinsatz. Die große Bedeutung von Darstellungswechseln in der Mathematik kann nicht oft genug betont werden. Erst die Theorie liefert die Grundlage einer Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Die kompliziert aussehende Formel (10) wird durch grafische Darstellungen mit „Leben gefüllt“. Die Lernenden haben hier die Möglichkeit, außer der Binomial- und Normalverteilung auch andere Verteilungen zumindest einmal gesehen zu haben. Sogar der zentrale Grenzwertsatz kann erahnt werden. Zudem kann man wie in der Analysis auch hier Graphen (begründet) zuzuordnen lassen.

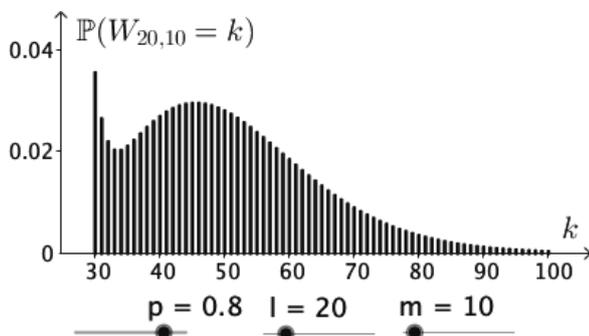


Abb. 8: Graph zu $\mathbb{P}(W_{20,10}) = k$ mit GeoGebra

Während das Stabdiagramm von Abb. 9 einen vertrauten Eindruck macht, ist das (durch Simulationen bestätigte) lokale Minimum der Wahrscheinlichkeiten in Abb. 8 bei $k = 34$ überraschend. Wir haben hierfür keine intuitive Erklärung.

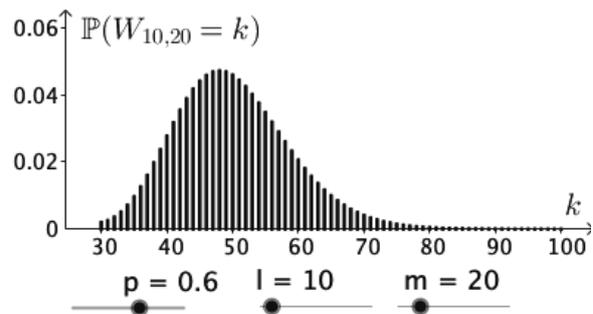


Abb. 9: Graph zu $\mathbb{P}(W_{10,20}) = k$ mit GeoGebra

6 Der Erwartungswert von $W_{\ell, m}$

Wie kann man an den Erwartungswert von $W_{\ell, m}$ gelangen? Die erste Möglichkeit besteht darin, nach der Regel „bilde die Summe aus Wert mal Wahrscheinlichkeit“ vorzugehen, was nach (10) zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{\ell, m}) &= \sum_{j=n}^{\infty} j \mathbb{P}(W_{\ell, m} = j) \\ &= p^{\ell} \sum_{j=n}^{\infty} j \binom{j-1}{\ell-1} (1-p)^{j-\ell} \\ &\quad + (1-p)^m \sum_{j=n}^{\infty} j \binom{j-1}{m-1} p^{j-m} \end{aligned}$$

führt. Die für $\ell \geq 1$ und $m \geq 1$ auftretenden Reihen lassen sich mithilfe der k -ten Ableitung

$$\sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\dots(j-k+1)x^{k-j} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad |x| < 1,$$

der geometrischen Reihe jeweils in Form endlicher Summen ausdrücken. Setzen wir allgemein für reelles x und eine natürliche Zahl k

$$(x)_k := x(x-1)\dots(x-k+1),$$

so nimmt die erste Reihe für $\ell \geq 1$ die Gestalt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=n}^{\infty} j \binom{j-1}{\ell-1} (1-p)^{j-\ell} \\ &= \frac{1}{(\ell-1)!} \sum_{j=n}^{\infty} (j)_{\ell} (1-p)^{j-\ell} \\ &= \frac{1}{(\ell-1)!} \left(\sum_{j=\ell}^{\infty} (j)_{\ell} (1-p)^{j-\ell} - \sum_{j=\ell}^{n-1} (j)_{\ell} (1-p)^{j-\ell} \right) \\ &= \frac{\ell}{p^{\ell+1}} - \frac{1}{(\ell-1)!} \sum_{j=\ell}^{n-1} (j)_{\ell} (1-p)^{j-\ell} \end{aligned}$$

an. In gleicher Weise gilt für $m \geq 1$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=n}^{\infty} j \binom{j-1}{m-1} p^{j-m} \\ &= \frac{m}{(1-p)^{m+1}} - \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=m}^{n-1} (j)_m p^{j-m}. \end{aligned}$$

Somit folgt mit $n = \ell + m$ für $\ell, m \geq 1$

$$\mathbb{E}(W_{\ell,m}) = \frac{\ell}{p} - \frac{p^\ell}{(\ell-1)!} \sum_{j=\ell}^{n-1} (j)_\ell (1-p)^{j-\ell} \quad (13)$$

$$+ \frac{m}{1-p} - \frac{(1-p)^m}{(m-1)!} \sum_{j=m}^{n-1} (j)_m p^{j-m}.$$

Hiermit erhält man das schon vorher erhaltene Resultat (6) im Spezialfall $\ell = m = 1$.

In den Fällen $m = 0$ bzw. $\ell = 0$ gelten

$$\mathbb{E}(W_{\ell,0}) = \frac{\ell}{p}, \quad \mathbb{E}(W_{0,m}) = \frac{m}{1-p}. \quad (14)$$

Diese Gleichungen kann man auf Kursstufenniveau auch ohne Zuhilfenahme der geometrischen Reihe erhalten. Die Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum ℓ -ten Treffer ist die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer plus die Summe der Anzahlen der Versuche zwischen dem j -ten und dem $(j+1)$ -ten Treffer, wobei $j = 1, \dots, \ell-1$. Jeder dieser Summanden hat den gleichen Erwartungswert $1/p$, sodass das erste Gleichheitszeichen in (14) folgt. Für dieses Argument hilft auch, den Zustandsgraphen aus Abb. 1 um weitere Knoten zu verlängern, vgl. auch die Diskussion nach Abb. 4. Analog ergibt sich das zweite Gleichheitszeichen.

Eine zweite Möglichkeit, den Erwartungswert von $W_{\ell,m}$ für allgemeine Werte von ℓ und m zu erhalten, besteht darin, im Fall $\ell \geq 1$ und $m \geq 1$ eine Fallunterscheidung nach dem Ergebnis des ersten Bernoulli-Versuchs vorzunehmen. Tritt ein Treffer auf, was mit der Wahrscheinlichkeit p passiert, so befindet man sich danach in der Situation, dass noch $\ell-1$ Chips auf Treffer und m Chips auf Niete gesetzt sind. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen, die sich auf verschiedene Bernoulli-Versuche beziehen, benötigt man also nach dem ersten, im Hinblick auf den Erwartungswert mitzuzählenden Versuch „im Mittel“ (Erwartungswert) noch $\mathbb{E}(W_{\ell-1,m})$ Versuche, bis alle Chips abgeräumt sind. Für den Fall, dass der erste Versuch eine Niete ergibt, sind danach hingegen im Mittel noch $\mathbb{E}(W_{\ell,m-1})$ Versuche erforderlich. Die Formel vom totalen Erwartungswert (Mittelwertsregel) liefert also die rekursive Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{\ell,m}) &= p(1 + \mathbb{E}(W_{\ell-1,m})) \\ &\quad + (1-p)(1 + \mathbb{E}(W_{\ell,m-1})) \\ &= 1 + p\mathbb{E}(W_{\ell-1,m}) + (1-p)\mathbb{E}(W_{\ell,m-1}), \end{aligned}$$

falls $\ell \geq 1$ und $m \geq 1$. Zusammen mit den Randbedingungen (14) lässt sich also $\mathbb{E}(W_{\ell,m})$ mithilfe eines

Computers bestimmen. Man beachte, dass wir obige Überlegung und die Formel vom totalen Erwartungswert bereits im Spezialfall $\ell = m = 1$ verwendet haben, vgl. die Ausführungen nach Gleichung (6).

Mithilfe von (6) und (14) liefert die obige Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{2,1}) &= 1 + p\mathbb{E}(W_{1,1}) + (1-p)\mathbb{E}(W_{2,0}) \\ &= 1 + p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1\right) + (1-p)\frac{2}{p} \\ &= \frac{2}{p} + \frac{1}{1-p} - p - 1, \end{aligned}$$

im Einklang mit der allgemeinen Formel (13).

Analog zum Fall $n = 2$ kann man auch für $n = 3$ die Frage stellen, für welches p die Erwartungswerte $\mathbb{E}(W_{2,1})$ und $\mathbb{E}(W_{3,0})$ gleich sind. Die resultierende Gleichung

$$\frac{3}{p} = \frac{2}{p} + \frac{1}{1-p} - p - 1$$

führt auf die kubische Gleichung $p^3 + p - 1 = 0$, die die einzige reelle Lösung

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{(108 + 12\sqrt{93})^{1/3}}{6} - \frac{2}{(108 + 12\sqrt{93})^{1/3}} \\ &\approx 0,682 \end{aligned} \quad (15)$$

besitzt.

7 Das allgemeine Zwei-Personen-Spiel

In Verallgemeinerung von Abschn. 4 setzen jetzt Anja und Bettina je insgesamt $n \geq 2$ Chips, verteilen sie aber unterschiedlich auf Treffer und Niete. Anja setzt ℓ Chips auf Treffer und m auf Niete, und bei Bettina sind es r bzw. s Chips, die sie auf Treffer bzw. Niete setzt. Es gelten also $n = \ell + m$ und $n = r + s$, wobei ansonsten ℓ, m, r und s beliebige nichtnegative ganze Zahlen sind. Da die beiden Setzstrategien verschieden sein sollen, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Anja mehr Chips auf Treffer setzt als Bettina; es gelte also $\ell > r$ und damit $m < s$. Es hat diejenige Spielerin gewonnen, die als erste alle ihre Chips entfernen kann.

Wir behaupten, dass Anja genau dann das Spiel gewinnt, wenn in der Folge der Bernoulli-Versuche der ℓ -te Treffer vor der s -ten Niete auftritt und somit die Werte r und m keine Rolle spielen. Warum? Tritt der ℓ -te Treffer vor der s -ten Niete auf, so hat Anja alle ihre Chips, die sie auf Treffer gesetzt hat, entfernt, bevor Bettina fertig ist, denn Bettina konnte noch nicht alle ihre auf Niete gesetzten Chips entfernen.

Selbst wenn beim Auftreten des ℓ -ten Treffers weniger als m Nieten aufgetreten sind und Anja noch nicht fertig ist, weil sie ja alle ihre m auf Niete gesetzten Chips abräumen muss, macht das nichts, denn – egal, wie viele Treffer jetzt noch kommen – irgendwann stellen sich Nieten ein, und Anja hat nur insgesamt m Chips auf Niete gesetzt, Bettina hingegen s , und es gilt $s > m$. Mit dem gleichen Argument gewinnt Bettina das Spiel, wenn in der Folge der Bernoulli-Versuche die s -te Niete vor dem ℓ -ten Treffer auftritt.

In der Folge bezeichne die Zufallsgröße T die Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum Auftreten des ℓ -ten Treffers. Der ℓ -te Treffer tritt genau dann vor der s -ten Niete auf, wenn das Ereignis $\{T < \ell + s\}$ eintritt. Da T nur Werte annehmen kann, die größer oder gleich ℓ sind, ist also die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja durch

$$\mathbb{P}(T \leq \ell + s - 1) = \sum_{k=\ell}^{\ell+s-1} \mathbb{P}(T = k) \quad (16)$$

gegeben. Wir benötigen also noch die Wahrscheinlichkeit, dass der ℓ -te Treffer im k -ten Bernoulli-Versuch auftritt. Hierfür müssen in den ersten $k - 1$ Bernoulli-Versuchen $\ell - 1$ Treffer und $k - \ell$ Nieten auftreten, und der k -te Versuch muss einen Treffer ergeben. Es folgt

$$\mathbb{P}(T = k) = \binom{k-1}{\ell-1} p^\ell (1-p)^{k-\ell},$$

und somit ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja gleich

$$f(p) := p^\ell \sum_{k=\ell}^{\ell+s-1} \binom{k-1}{\ell-1} (1-p)^{k-\ell}. \quad (17)$$

Tritt Anja im Fall $n = 3$ mit der Setzstrategie (3,0) gegen Bettina an, die die Strategie (2,1) wählt, so gewinnt sie mit der Wahrscheinlichkeit p^3 . Das Spiel ist also mit diesen beiden Setzstrategien genau dann fair, wenn $p^3 = \frac{1}{2}$ gilt, was auf das „faire“ $p = \tilde{p}$ mit

$$\tilde{p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \approx 0,794$$

führt. Würden beide unter Zugrundelegung des vom Erwartungswert der Dauer bis zum Abräumen der Chips her „fairen Wertes“ p^* für p (siehe (15)) spielen, so betrüge die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja nur ca. 0,318. Auch hier liegt also eine ähnlich paradoxe Situation vor wie im Fall $n = 2$.

Tabelle 2 zeigt für verschiedene Szenarien und Setzstrategien von Anja (A) und Bettina (B) die auf

zwei Dezimalstellen gerundeten und mit \mathbb{E}_A bzw. \mathbb{E}_B abgekürzten Erwartungswerte der Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum Abräumen aller Chips. Die letzte Spalte gibt die mithilfe von GeoGebra berechneten Gewinnwahrscheinlichkeiten (17) für Anja im Fall $p = 0,6$ an. Diese Werte wurden auf vier Dezimalstellen gerundet (GeoGebra liefert hier sogar exakte Brüche) und durch Simulationen bestätigt.

A	B	\mathbb{E}_A	\mathbb{E}_B	$\mathbb{P}(\text{Anja gewinnt})$
(3,1)	(2,2)	5,54	5,85	0,4752
(7,3)	(6,4)	12,58	12,51	0,3823
(60,40)	(59,41)	108,12	108,72	0,5433
(61,39)	(60,40)	107,86	108,12	0,4621

Tab. 2: Erwartungswerte $\mathbb{E}(W_{\ell,m})$ und Gewinnwahrscheinlichkeiten für verschiedene Szenarien und Setzstrategien

Im ersten Szenario liefert ein kleinerer Erwartungswert nicht zwangsläufig eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja. Zeile 2 zeigt, dass kleine Unterschiede im Erwartungswert große Unterschiede bei den Gewinnwahrscheinlichkeiten ergeben können. Zeile 3 und 4 verdeutlichen, dass selbst bei großen Chipanzahlen kleine Veränderungen der Setzstrategie vergleichsweise große Auswirkungen auf die Gewinnwahrscheinlichkeiten haben. Man beachte, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für Bettina stets komplementär zu der von Anja ist.

Intuitiv ist klar, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für Anja bei jeder Wahl von ℓ und s eine streng monoton wachsende Funktion von p sein sollte. Nach (17) ist diese mit f bezeichnete Funktion ein Polynom vom Grad $\ell + s - 1$. Im Spezialfall $\ell = 3$ und $s = 2$ gilt $f(p) = 4p^3 - 3p^4$, und es folgt $f'(p) = 12p^2(1-p)$. Da die Ableitung positiv ist, ist f in diesem Spezialfall streng monoton wachsend. Abb. 10 zeigt die Graphen von f für $\ell = 4$ und $s = 3, \dots, 6$.

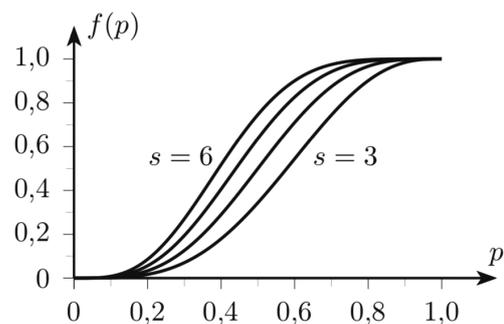


Abb. 10: Graphen von f für $\ell = 4$; $s = 3, \dots, 6$

Für die allgemeine Situation kann man die strikte Monotonie von f wie folgt rein probabilistisch beweisen: Es seien hierzu U_1, U_2, \dots stochastisch unabhängige Zufallsgrößen, die je eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$ besitzen. Wir erzeugen hieraus die $\text{Bin}(1;p)$ -verteilten X_1, X_2, \dots , indem wir $X_j := 1$, falls $U_j \leq p$, und $X_j := 0$, falls, $U_j > p$, setzen und die Darstellung (16) von $f(p)$ beachten. Der Vorteil dieser Erzeugungsweise der X_j besteht darin, dass beim Übergang von p_1 zu p_2 mit $p_2 > p_1$ gewisse Realisierungen von X_j von 0 nach 1 wechseln können, was mit positiver Wahrscheinlichkeit geschieht und zur Folge hat, dass der von der Folge U_1, U_2, \dots abhängende Wert der Zufallsgröße T (Anzahl der Bernoulli-Versuche bis zum Auftreten des ℓ -ten Treffers) nur kleiner und damit die Wahrscheinlichkeit in (17) nur größer werden kann.

8 Fazit

Im Zusammenhang mit unabhängigen Bernoulli-Versuchen gilt momentan die Binomialverteilung als Schlüsselkonzept. Bei genauerem Hinsehen entpuppt sich dieses Konzept aber eher als eine Sammlung von Rezepten, die mit dem stereotypen „Man kann zeigen, dass ...“ garniert sind und Mathematik als Fertigprodukt erscheinen lassen. Dieser Aufsatz zeigt, dass in einem gewinnbringenden Zusammenspiel von Theorie und Simulation Variationen einer Aufgabenstellung im Zusammenhang mit Bernoulli-Versuchen zu vielfältigen Problemstellungen führen. Dabei können Schülerinnen und Schüler Tore zur Universität aufstoßen, indem sie echte Forschungsfragen formulieren. Zudem stellen sie überraschend fest, dass die Optimierung eines Erwartungswertes nicht immer die beste Strategie ist, und sie lernen neben der allgegenwärtigen Binomialverteilung und der Normalverteilung auch andere Verteilungen kennen. Schlussendlich ist dieser Aufsatz auch ein Plädoyer für die geometrische Reihe.

9 Anhang

9.1 Simulationen mit R

Die zentrale Idee besteht darin, dass der Befehl $c(4,2)$ einen Vektor mit zwei Komponenten liefert, der mit der Setzstrategie (hier: $(4,2)$) gefüllt wird. In Abhängigkeit vom Ergebnis des Bernoulli-Versuchs werden die Inhalte der beiden Komponenten so lange um eins verringert, bis jede Komponente den Wert null aufweist (s. Abb. 11).

Der Bernoulli-Versuch wird mit dem *sample*-Befehl realisiert. Es wird aus $\{1,2\}$ zufällig eine Zahl ge-

zogen, wobei die Ziehungswahrscheinlichkeit durch den Vektor $c(p,1-p)$ gesteuert wird. Dabei entspricht im Programm die 1 dem Treffer und die 2 der Niete. Dieses Bernoulli-Experiment wird mithilfe einer FOR-Schleife n -mal in unabhängiger Folge wiederholt. Dabei wird jedes Mal die Anzahl der Versuche bis zum Abräumen im Vektor *Anzahl* gespeichert. Zum Schluss wird mit dem *mean*-Befehl daraus das arithmetische Mittel berechnet. Mit dem *table*-Befehl erhält man die zugehörige Häufigkeitsverteilung, die auch als Plot dargestellt werden kann.

```

14 n<-10000; Anzahl<-rep(0,times=n)
15 p<-0.6; Verteilung<-c(4,2)
16 for (i in 1:n)
17 { a<-Verteilung; AnzahlVersuche<-0
18   while ( sum(a)!=0 )
19   { AnzahlVersuche<-AnzahlVersuche+1
20     Zahl<-sample(1:2,size=1,prob=c(p,1-p))
21     if (a[Zahl]!=0) a[Zahl]<-a[Zahl]-1
22   }
23   Anzahl[i]<-AnzahlVersuche
24 }
25 Erwartungswert<-mean(Anzahl)
26 table(Anzahl)

```

Abb. 11: Umsetzung mit R - ein Spieler

Abb. 12 zeigt die Umsetzung eines Zwei-Personen-Spiels. Hinzu kommen im Wesentlichen nur zwei Vergleiche (Zeile 24 und 26), um zu entscheiden, welche Spielerin ihre Chips zuerst abgeräumt hat.

```

14 Verteilung1<-c(4,2); Verteilung2<-c(5,1)
15 n<-10000; Anzahl<-rep(0,times=n); p<-0.60
16 gewA<-rep(0,times=n); gewB<-rep(0,times=n)
17 for (i in 1:n)
18 { a<-Verteilung1; b<-Verteilung2
19   while ( sum(a)*sum(b) !=0 )
20   { zz<-sample(1:2,size=1,prob=c(p,1-p))
21     if (a[zz]!=0) a[zz]<-a[zz]-1
22     if (b[zz]!=0) b[zz]<-b[zz]-1
23   }
24   gewA[i]<-sum(a)<sum(b)
25   hA<-sum(gewA)/n*100
26   gewB[i]<-sum(a)>sum(b)
27   hB<-sum(gewB)/n*100

```

Abb. 12: Umsetzung mit R - zwei Spieler

9.2 Simulationen mit GeoGebra

Die Umsetzung des Spiels kann mithilfe einer Tabellenkalkulation Schritt für Schritt durchgeführt werden. An dieser Stelle (s. Abb. 13) wird die Umsetzung mit dem GeoGebra-Objekt *Liste* vorgestellt. Dieses Objekt wird u. a. mit dem Befehl *Folge* erzeugt. Es erfordert ein grundsätzlich anderes Vorgehen als z. B. in R oder *Python*, da Schleifenstrukturen im Algebra-Fenster nicht zur Verfügung stehen.

Die zentrale Idee besteht darin, dass die Liste ZA endlicher Länge (hier 200) mit dem `random()`-Befehl in Abhängigkeit von p mit Nullen und Einsen gefüllt wird. Eigentlich reicht diese Befüllung schon aus (s. Abschnitt 2.1), denn alle anderen Befehle dienen nur der Automatisierung der Auswertung. Die schrittweise Addition der Treffer (der Einsen in ZA) und Subtraktion vom Wert von ℓ wird mit nur einem Befehl realisiert (s. Liste A). Der Befehl `IndexVon(0,A)` liefert die Stelle in A, an der zum ersten Mal eine Null erscheint. Mit den Listen ZB und B wird das Abräumen der Chips simuliert, wenn eine Niete (eine Null) erscheint. Die Umsetzung verläuft entsprechend. Es muss nur die Folge ZA invertiert werden (s. ZB). Der Variablen `AnzahlZuege` wird mithilfe der Maximumfunktion der Wert für $W_{\ell,m}$ zugewiesen. Abb. 13 zeigt die Definition der einzelnen Befehle.



Abb. 13: Simulation mit GeoGebra - Befehlen

Liefert z. B. eine Simulation $ZA = \{1,1,1,0,1,0,\dots\}$, so ergeben sich für die anderen Objekte die Werte $ZB = \{0,0,0,1,0,1,\dots\}$, $A = \{3,2,1,1,0,0,\dots\}$, $B = \{2,2,2,1,1,0,\dots\}$, $AnzahlA = 5$; $AnzahlB = 6$ und $AnzahlZuege = 6$.

9.3 Lösungshinweise zur Initialaufgabe

zu a) Es gelten $\mathbb{P}(A) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 = 0,3456$,
 $\mathbb{P}(B) = \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,3456$,
 $\mathbb{P}(C) = \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 + \binom{4}{4} \cdot 0,6^4 = 0,4752$.

zu b) Damit erst nach fünf Versuchen alle Chips entfernt sind, müssen nach vier Versuchen genau drei Chips entfernt sein. Das kann auf $\binom{4}{3}$ -Arten geschehen (1110;1101;1011;0111). Im fünften Versuch muss dann ein Treffer stattfinden. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{4,0} = 5) &= \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6 = 0,20736, \\ \mathbb{P}(W_{4,0} = 6) &= \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,20736, \\ \mathbb{P}(W_{4,0} = 7) &= \binom{6}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,165888, \\ \mathbb{P}(W_{4,0} = k) &= \binom{k-1}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^{k-4} \cdot 0,6.\end{aligned}$$

zu c) Der Näherungswert beträgt ca. 6%.

zu d) Die durchschnittliche Anzahl (gerundet) beträgt 5,47.

zu e) Es gilt $\mathbb{E}(W_{3,1}) = 5,54$. Rechnereinsatz (`solve`-Befehl oder Schnittpunktbestimmung) liefert $p_1 \approx 0,301$ und $p_2 \approx 0,893$.

Danksagung: Wir danken den Gutachtern sowie Joachim Engel und Kai Müller für wertvolle Hinweise.

Literatur

- Ebner, B. und Henze, N. (2016). Runs in Bernoulli-Ketten. *Stochastik in der Schule* 36, 21–27.
- Core Team, R. (2015). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- Engel, A. (1976). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 2. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
- Henze, N. (2000). Muster in Bernoulli-Ketten. *Stochastik in der Schule* 21, 2–20.
- Henze, N. (2021). Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Springer Spektrum, Heidelberg.
- Henze, N., Müller, K., und Schilling, J. (2021). Stochastik rezeptfrei unterrichten. Anregungen für spannende Lehre über den Zufall. Springer Spektrum, Heidelberg.
- Riemer, W. (2019). Die Gefangenen „in Lummerland“ – eine kleine Ergänzung zu „Release the prisoners“. *Der Mathematikunterricht* (MU) 65(6), 31–32.

Anschriften der Verfasser:

Prof. i.R. Dr. Norbert Henze
 KIT Distinguished Senior Fellow
 Institut für Stochastik
 Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
 Englerstr. 2
 76131 Karlsruhe
 Henze@kit.edu

Reimund Vehling
 Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien
 Hannover I
 vehling@icloud.com